Основная проблема нелинейных дифуров - неприменимость принципа суперпозиции. Разложить в ряд, интеграл Фурье – эти способы более нам недоступны…

Часть 1 – квазилинейная теплопроводность

34. Что такое автомодельное решение?
35. Дайте определение квазилинейного уравнения теплопроводности.
36. Сформулируйте основные свойства квазилинейного уравнения теплопроводности.
37. Что такое тепловые волны? При каких условиях они возникают?
38. Что такое режимы с обострением? Приведите примеры.
39. При каком режиме с обострением образуется стоячая тепловая волна?

Рассмотрим нелинейное уравнение теплопроводности:

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[k(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right]$$

Оно отличается от линейного тем, что k зависит от u. Но т.к. оно всё же похоже на уравнение теплопроводности, то оно называется квазилинейным. Также оно параболического типа – есть вторая производная по абсциссе, но по времени второй производной нет.
{Ну ё-моё, уже забыли это из ММФ? Если да, то быстренько напомню.
Если есть вторые производные по всем переменным, и если их перенести в одну часть, они будут одного знака – это эллиптический тип (ср. $x^2+y^2=1$, эллипс)
Если есть вторые производные по всем переменным, и если их перенести в одну часть, они будут разных знака – это эллиптический тип (ср. $x^2-y^2=1$, гипербола)
Если хотя бы по одной из переменных нет второй производной – параболический тип (ср. $x^2-y=1$, парабола).
Так что у уравнения теплопроводности тип всегда параболический, потому что второй производной по времени нет!}

Вот мы и ответили на

35. Дайте определение квазилинейного уравнения теплопроводности.
36. Сформулируйте основные свойства квазилинейного уравнения теплопроводности.

А как решать-то будем? Методом автомодельных решений. Сейчас я покажу, как.

Очевидно, что решение дифура $c\rho\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[k(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right]$ будет сильно зависеть от вида функции k(u).

Если k не зависело бы от u, то решение u(x,t) было бы вида

$$\xi = \frac{x}{2\sqrt{t}}, \quad u(x,t) = \theta\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) = \theta(\xi)$$

(Вспоминаете такое? Было на ММФ, когда мы возюкались с уравнением теплопроводности)

А может, такое же решение будет ещё при каких-нибудь k(u)? Ну для этого надо переписать начальное уравнение, заменив u, x, t на k, θ, ξ. Получим

$$\begin{cases} [k(\theta)\cdot\theta']' = -2c\rho\xi\theta', \quad \xi > 0; \\ \theta(0) = u_1, \quad \theta(\infty) = u_2. \end{cases}$$

Получим нелинейный дифур (зато одномерный!), который решается численно. Можно показать, что решение у него единственное.

Можно искать решение и в виде бегущей волны. При линейном уравнении теплопроводности такое невозможно. А вот при нелинейном возможно. Тогда

$$u(x,t) = \theta(x - Dt) = \theta(\xi), \quad \xi = x - Dt.$$

Если опять заменить u, x, t на k, θ, ξ, то получим одномерный дифур

$$[k(\theta)\cdot\theta]' = -Dc\rho\theta', \quad -\infty < \xi < +\infty.$$

Теперь ещё раз о методе автомодельных решений. Если k(u) будет k (или хотя бы зависеть только от x, но не от u) – то будет ММФ, это мы уже решали.
Если k(u) будет какое-то, то будет решение в виде бегущих волн.

Автомодельный подход заключается в том, что мы не ищем u(x,t) при заданной k(u), а наоборот – мы ищем k(u), при который u(x,t) имеет нужный вам вид – например, вид бегущей волны.

Если посмотрите выше на дифуры с k(θ), то там θ как раз будет переменной, а k – функцией, относительно которой дифур.

Теперь мы можем ответить на вопрос №34 –

34. Что такое автомодельное решение?

Это некие частные хорошие, красивые решения u(x,t), и мы ищем, при какой k(u) они достигаются.

И, например, при каких же k(u) у нас будет достигаться бегущие волны? Ну, например при таких k(u):

$$k(u) = k_0 \times u^{\sigma}, \quad k_0 > 0, \ \sigma > 0$$

(при $\sigma = 5/2$ получаем коэффициент электронной теплопроводности в полностью ионизованной плазме).

Решение тогда будет вот таким:

$$u(x,t) = \begin{cases} u_0 t^{\frac{1}{\sigma}} \left[1 - \dfrac{x}{Dt}\right]^{\frac{1}{\sigma}}, & 0 \leqslant x \leqslant Dt; \\ 0, & x > Dt. \end{cases}, \quad \text{где} \quad u_0 = \left(\frac{\sigma D^2 c\rho}{k_0}\right)^{\frac{1}{\sigma}}$$

Тем самым мы ответили на

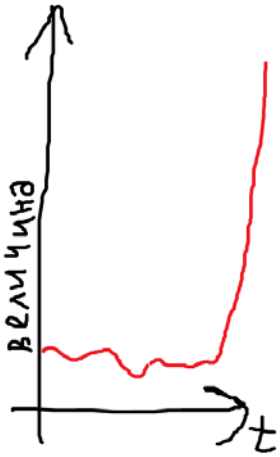
37. Что такое тепловые волны? При каких условиях они возникают?

Поговорим про обострение:

38. Что такое режимы с обострением? Приведите примеры.
39. При каком режиме с обострением образуется стоячая тепловая волна?

Режимом с обострением называется такой закон изменения некоторой величины, который обеспечивает её неограниченное возрастание в течение конечного времени.

Ну то есть у нас какая-то величина внезапно начинает рааасти…



РАААСТИ… куда ты уходишь от нас?!

Например, Боголюбов рассматривает задачу горения

$$\begin{cases} u_t = k_0(u^2 u_x)_x + q_0 u^{\beta}, & -\infty < x < +\infty, \ 0 < t \leqslant T; \\ u(x,0) = u_0(x), & -\infty < x < +\infty; \quad k_0 > 0, \ q_0 > 0. \end{cases}$$

Отличающуюся от обычной теплопроводности наличием u^2 и слагаемым $q_0 u^{\beta}$, отвечающим за тепловыделение.

Поведение решения, естественно, зависит от β. От нас в 39 вопросе спрашивают, когда будет стоячая волна. Ответ: при β=3. Тогда решение будет

$$u_A(x,t) = \frac{1}{\sqrt{T_0 - t}} \times \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi x}{L_S}\right), & |x| < \frac{L_S}{2}; \\ 0, & |x| \geqslant \frac{L_S}{2}. \end{cases} \tag{328}$$

Как вы видите, оно локализовано в области $\omega_L = \left(-\frac{L_S}{2}, \frac{L_S}{2}\right)$. Ну а при t->$T_0$ у нас происходит обещанное обострение – решение устремляется на бесконечность.

Тепловая структура (328) называется локализованным S - режимом с обострением и представляет собой стоячую температурную волну.

- как раз то, что от нас просили в 39-м вопросе.

Часть 2 – квазилинейный перенос

40. Напишите квазилинейное уравнение переноса.
41. Напишите уравнение характеристик для квазилинейного уравнения переноса.
42. Могут ли характеристики квазилинейного уравнения переноса пересекаться? Что это означает физически?
43. В чем состоит явление опрокидывания волн? Как его можно объяснить?
44. В каких случаях необходимо строить обобщенное решение квазилинейного уравнения переноса?
45. Напишите условие на разрыве (условие Гюгонио-Ренкина).

Ранее мы взяли уравнение теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx}$$

И, введя зависимость a от u

$$u_t = a^2 u_{xx}$$

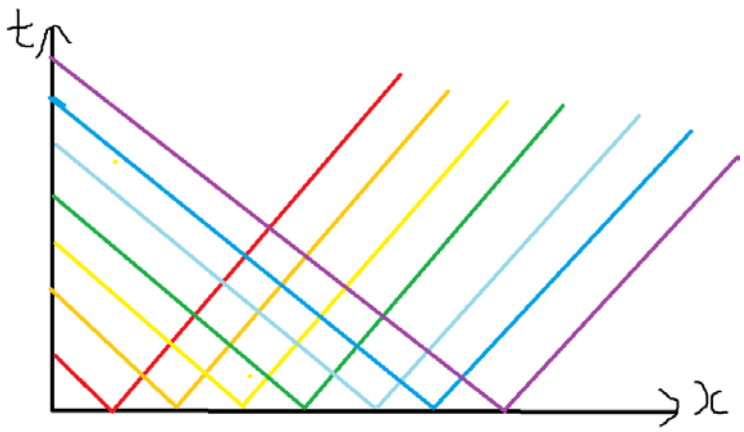
получили удивительные результаты.

Теперь давайте таким же образом поиздеваемся над уравнением переноса. Раньше оно было

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

С решением в виде двух волн: слева направо и справа налево

$$u(x,t) = f_1(x - at) + f_2(x + at)$$



Но вообще его можно свести к более простым уравнениям первого порядка:

$$u_t = au_x$$
$$u_t = -au_x$$

Описывающим волны каждое в свою сторону.

А теперь даёшь нелинейность!!! В $u_t = au_x$ коэф перестаёт быть постоянным и становится зависящим от u:

$$u_t + F(u)u_x = 0$$

40. Напишите квазилинейное уравнение переноса.

Далее Боголюбов решает частный случай, когда F(u)=u:

$$u_t + uu_x = 0$$

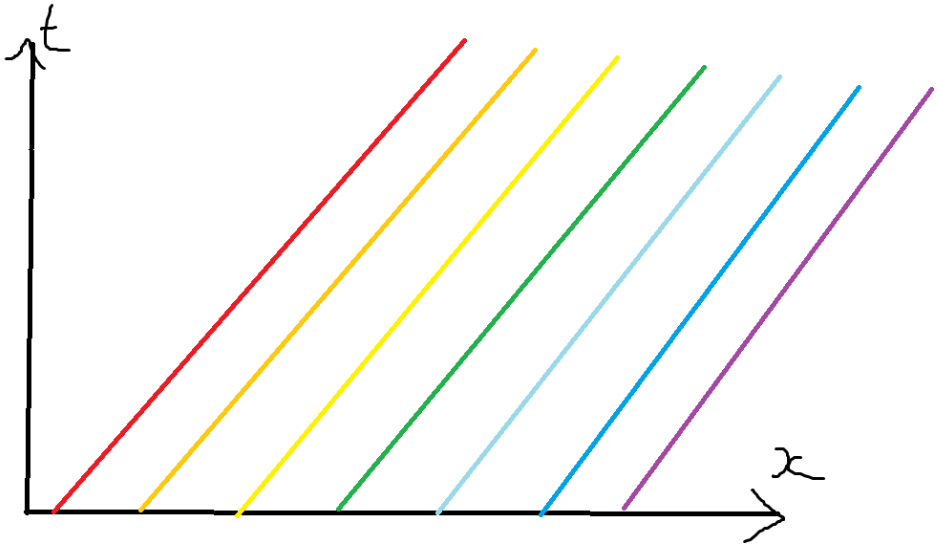
И приходит к интересным результатам:

41. Напишите уравнение характеристик для квазилинейного уравнения переноса.

Ну написать-то мы напишем:

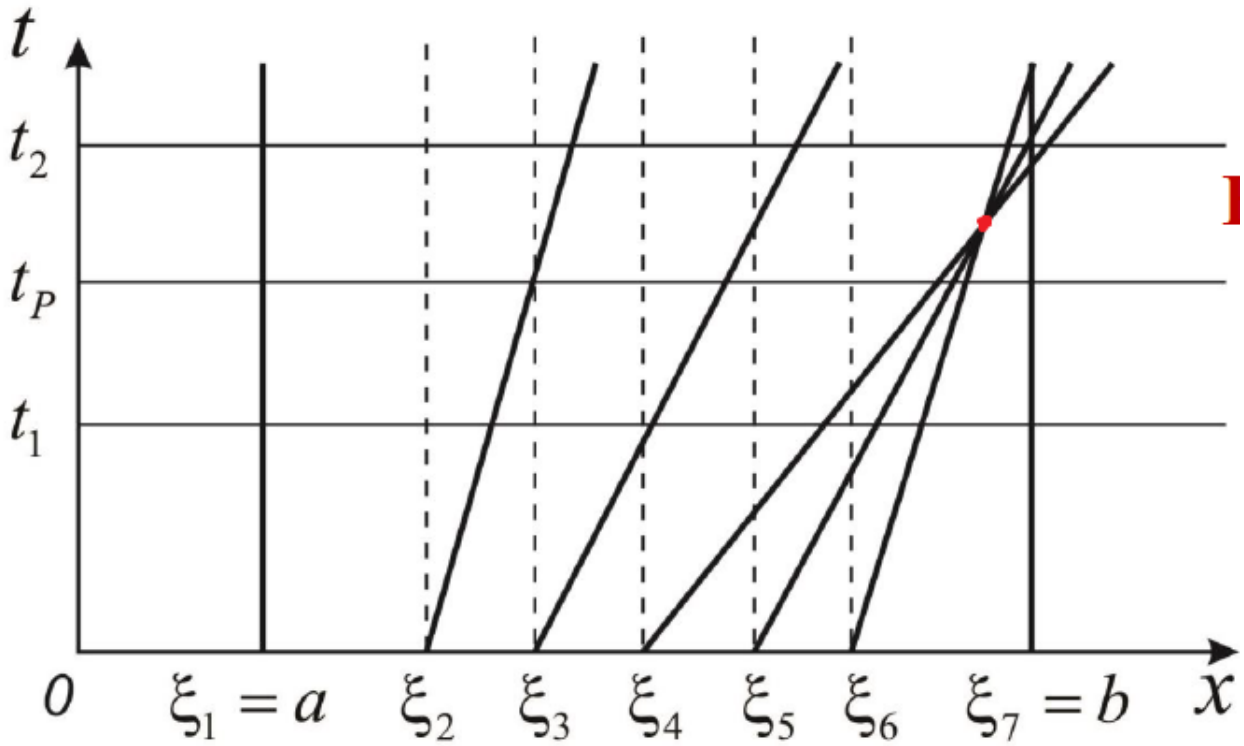
$x = \xi + u_0(\xi) \cdot t$, где ξ=x-ut.

Но в таком виде нифига не понятно, что происходит, так что даёшь картинки. Вот картинка для $u_t = -au_x$:



Прямые – характеристики. Всё понятно, волна переносится напрво.

А вот для квазилинейного:
$u_t = uu_x$:



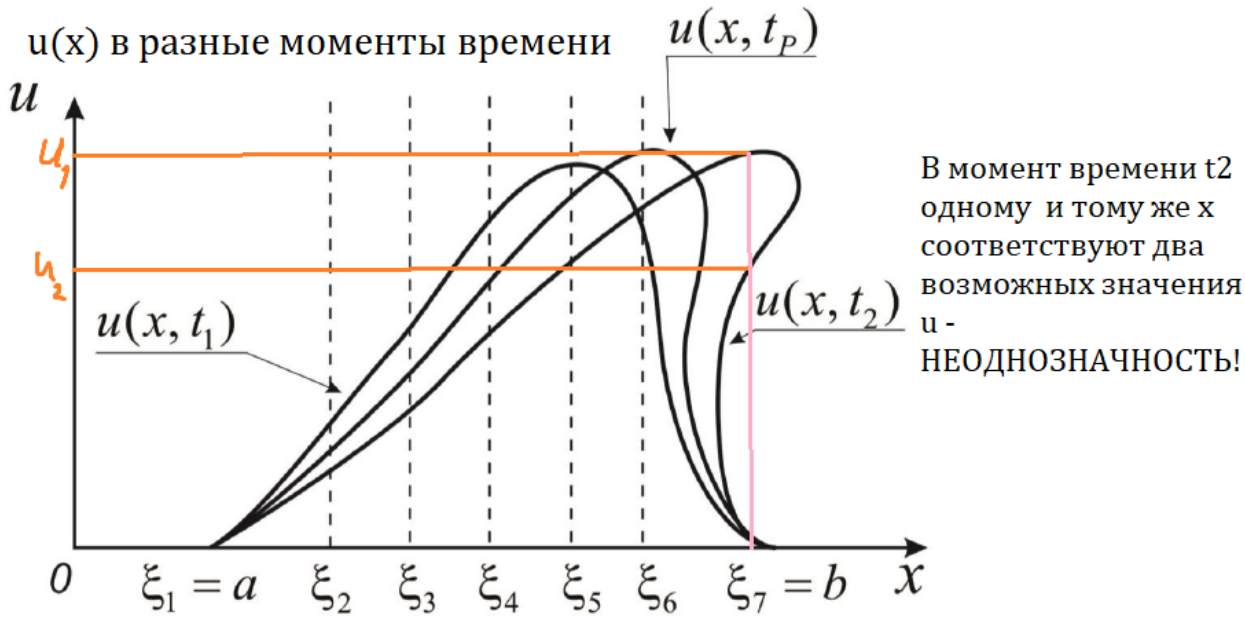
Тоже наклонные прямые, но под разным углом!

А в точке, отмеченной красной, и вовсе наметилась какая-то сходка характеристик. Пришли в одно и то же время в одно и то же место ☺

42. Могут ли характеристики квазилинейного уравнения переноса пересекаться? Что это означает физически?

Да, могут, мы это как раз видим ☺ Физическое объяснение таково, что скорость зависит от амплитуды волны u.

После такой сходки решение становится неоднозначным:

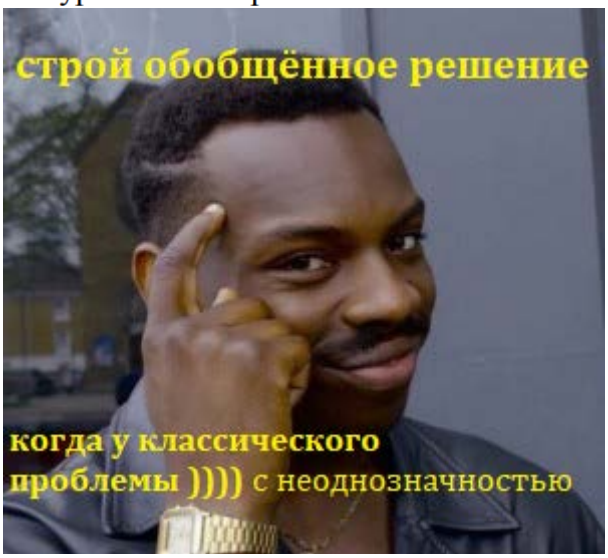


По-научному это называется «опрокидывание волны», и мы ответили на

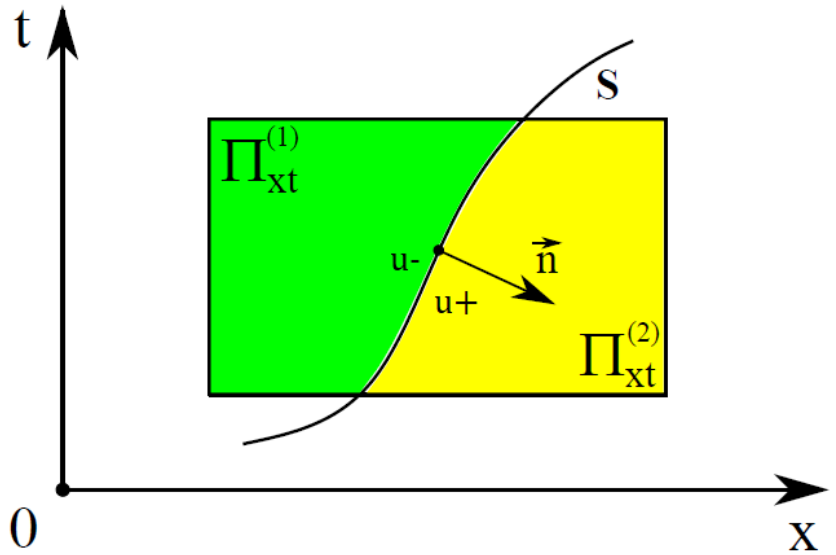
43. В чем состоит явление опрокидывания волн? Как его можно объяснить?

Чтобы сделать решение вновь однозначным, придётся искать u не как непрерывную дифференцируемую функцию, а разрывную. Она называется обобщённым решением. (В частности, ДУ там заменяется на требование равенства 0 вот такого интеграла $\int\limits_{\Pi_{xt}} \left\{ u\psi_t + \frac{1}{2} \cdot u^2 \psi_x \right\} \mathrm{d}x\mathrm{d}t = 0.$ в любой области).

44. В каких случаях необходимо строить обобщенное решение квазилинейного уравнения переноса?



Наше обобщённое решение, будучи разрывным, терпит разрыв на некоторой кривой S:



u- и u+ есть предельные значения u вблизи границы (см. рисунок). Они фигурируют в формуле Гюгонио-Ренкина:

45. Напишите условие на разрыве (условие Гюгонио-Ренкина)

$$\dot{s}(t) = \frac{u^+ + u^-}{2}$$

И оно характеризует скорость движения разрыва.

Часть 3 – Кортевег – де Фриз

46. Напишите уравнение Кортевега – де Фриза.
47. Для решения какой нелинейной задачи применяется схема решения обратной задачи рассеяния?
48. Изложите схему решения обратной задачи рассеяния.
49. Что такое солитонные решения?
50. Решением какого уравнения являются солитоны?

46. Напишите уравнение Кортевега – де Фриза.

Сейчас напишем. Оно описывает процессы распространения волн на воде:

$$\eta_t + c_0\left(1 + \frac{3}{2h_0}\cdot\eta\right)\times\eta_x + \frac{h_0^2}{6}c_0\eta_{xxx} = 0, \qquad (374)$$

где h_0 - глубина жидкости, $c_0 = \sqrt{gh_0}$ - скорость длины волны на мелкой воде.

Уравнение (374) называется **уравнением Кортевега - де Фриза.** Из (374) с помощью линейной замены переменных получим *каноническую* форму уравнения Кортевега - де Фриза (375):

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0. \qquad (375)$$

Чтобы было проще запомнить имена тех чуваков – Фриз созвучно с «бриз», а это такой морской ветер, от которого волны на воде.

47. Для решения какой нелинейной задачи применяется схема решения обратной задачи рассеяния?

Хммм, интересно, для какой же? Вопросы 46 и 47 идут подряд. Неужели для Фриза? Именно! Обратный метод рассеяния – для решения Кортевега-Фриза.

А что же за метод обратной задачи решения такой? Об этом 48-й вопрос

48. Изложите схему решения обратной задачи рассеяния.

Именно что схему, потому что само решение на несколько листов:

1. Рассматриваем стационарное уравнение Шредингера с потенциалом $u_0(x)$:

$$\psi_{xx} + [\lambda - u_0(x)]\psi = 0 \tag{391}$$

и определяем данные рассеяния: $\{\varkappa_m,\ C_m(t)\}$ и $\{a(k,t),\ b(k,t)\}$.

2. По формулам (388) - (390) определяем $C_m(t)$ и $b(k,t)$ строим ядро уравнения Гельфанда - Левитана (385):

$$B(x;t) = \sum_{m=1}^{n} C_m^2(0) \times e^{8\varkappa_m^2 t - \varkappa_m x} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} b(k,0) \times e^{i\cdot 8k^3 t + ikx}\, \mathrm{d}k. \tag{392}$$

3. Решив уравнение Гельфанда – Левитана (385) с ядром (392), по формуле (386) определяем решение $u(x,t)$ задачи Коши (387) для уравнения Кортевега – де Фриза.

Я уже слышу вопли «что за говно». Вообще-то это «чрезвычайно изящный метод» ☺

Это означает, что данное уравнение обладает *глубокой внутренней симметрией*, которая выделяет его среди других нелинейных уравнений и позволяет построить чрезвычайно изящный метод построения точного решения, основанный на обратной задаче рассеяния для одномерного стационарного уравнения Шредингера.

И вот мы наконец-то получаем решение

$$u(x,t) = -\frac{\alpha^2}{2} \cdot \frac{1}{\cosh^2\left[\dfrac{\alpha(x-x_0)}{2} - \dfrac{\alpha^3 t}{2}\right]} \tag{401}$$

У этих решений есть красивое название – солитоны.

Решения уравнения Кортевега – де Фриза вида (401) получили название **солитонов**. Они описывают бегущие волны неизменной формы, имеющие скорость, прямо пропорциональную амплитуде решения.

Ух ты, скорость зависит от амплитуды (т.е. большие волны бегут быстрее) – какой интересный результат. Тем самым мы ответили на вопросы

49. Что такое солитонные решения?

50. Решением какого уравнения являются солитоны?

Решениями Кортевега – Фриза ☺